ГЛАВА 20

Экзамены. Осень

Аннотация

Осенний экзамен по курсу «Квантовая теория поля для экспериментаторов» проходит в виде мини-проектов. Каждый студент получает собственное задание и примерно неделю времени для подготовки проекта.

Цели такого подхода:

1. Практическое примение полученных знаний для решения реальных научных задач.
2. Использование научного инструментария для решения и оформления решений: LaTeX, `git`, `python`.
3. Поощрение совместной работы студентов для решения общих задач проектов.
4. Стимулирование критического мышления и креативности. Работа над проектом дает возможность раскрыть свою креативность и поощряет критический подход при решении задач.

Структура проекта

1. Введение. Мотивация. Краткий обзор литературы. Постановка задачи.
2. Решение теоретической части.
3. Решение практической части.
4. Обсуждение результатов. Графики, таблицы.
5. Выводы. Возможное развитие сюжета.
6. Список использованной литературы.

Технические аспекты

1. Офомление готового проекта в системе LaTeX. Можно использовать бесплатный онлайн ресурс `overleaf.com`.
2. Фейнмановские диаграммы в `tikz-feynman`
3. Оформление рисунков `matplotlib`

20.1. Гармонический квантовый осциллятор

Цель: Изучить спектр энергий и динамику одномерной цепочки квантовых гармонических осцилляторов, включая анализ симметрий и визуализацию эволюции системы.

1. **Гамильтониан системы:** Рассмотрите одномерную цепочку из N идентичных атомов с расстоянием между соседними атомами a. Гамильтониан системы:

$$\widehat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\widehat{P}_i^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{N} (\widehat{X}_{i+1} - \widehat{X}_i)^2,$$

   где:

   - m — масса атома,
   - $k = m\omega^2$ — жёсткость связи между соседними атомами,
   - $\widehat{P}_i$ и $\widehat{X}_i$ — операторы импульса и координаты (отклонения от положения равновесия) i-го атома.

   Объясните, почему взаимодействие учитывается только между соседними атомами.

2. **Переход к операторам нормальных мод:** Определите операторы нормальных мод:

$$\widehat{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{ikan} \widehat{X}_n,$$

$$\widehat{\Pi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-ikan} \widehat{P}_n,$$

   где $k = \frac{2\pi}{N} m$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$.

   а) Вычислите коммутаторы $[\widehat{Q}_k, \widehat{\Pi}_{k'}]$, $[\widehat{Q}_k, \widehat{Q}_{k'}]$, и $[\widehat{\Pi}_k, \widehat{\Pi}_{k'}]$.

   б) Запишите гамильтониан $\widehat{H}$ через $\widehat{Q}_k$ и $\widehat{\Pi}_k$.

3. **Циклические граничные условия:** Предположите, что цепочка удовлетворяет циклическим граничным условиям:
$$\widehat{X}_{N+1} = \widehat{X}_1.$$
   а) Найдите собственные частоты ω_k системы, где k — волновой вектор.
   б) Покажите, что система эквивалентна набору независимых гармонических осцилляторов, каждый из которых соответствует своей моде k.
4. **Динамика атомов:**
   а) Вычислите волновую функцию $\psi(t)$ системы.
   б) Постройте анимацию среднего смещения атомов $X_n(t)$ при различных начальных условиях:
      - Один атом смещён: $X_i(0) \neq 0$, остальные $X_n(0) = 0$.
      - Два атома смещены: $X_i(0) \neq 0$, $X_k(0) \neq 0$, остальные $X_n(0) = 0$.
5. **Симметрии и сохраняющиеся заряды:**
   а) Найдите все симметрии задачи (например, трансляционная симметрия, инвариантность относительно сдвигов времени).
   б) Используя теорему Нётер, вычислите сохраняющиеся заряды, связанные с каждой симметрией.
   в) Объясните физический смысл этих зарядов (например, энергия, импульс, фазовая корреляция мод).

20.2. Атом водорода

1. Вычислите волновые функции атома водорода для $n = 1$, $j = 1/2$. Нарисуйте её. Сравните с решением уравнения Шрёдингера при $n = 1$.

2. Вычислите и нарисуйте спектр излучения атома водорода в теории Дирака.

3. Энергия уровней атома водорода в гравитационном поле звезды изменяется. Для фотонов, испускаемых атомами, это приводит к гравитационному красному смещению:

$$z = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2},$$

   где G - гравитационная постоянная, M и R — масса и радиус звезды, соответственно. Вычислите $\Delta\nu/\nu$ для разных типов звёзд. Какие из них позволяют наблюдать *гравитационное* красное смещение? Сравните с экспериментом.

20.3. $\pi^+\pi^-$-атом

Цель: Исследовать свойства $\pi^+\pi^-$-атома с учётом кулоновского и сильного взаимодействий. Рассчитать энергию связи, поправку за счёт сильного взаимодействия и сравнить с экспериментальными данными.

1. **Кулоновская энергия связи:** Вычислите основное значение энергии $1s$-состояния с учётом только электромагнитного взаимодействия. Оцените величину боровского радиуса.

2. **Поправка от сильного взаимодействия:** Рассчитайте поправку ΔE к энергии связи $1s$-состояния по формуле:

$$\Delta E = \frac{\int\limits_0^\infty |R_{1s}|^2 V_{\text{strong}}(r) r^2 dr}{\int\limits_0^\infty |R_{1s}|^2 r^2 dr},$$

   используя три различных потенциала для сильного взаимодействия:

а) *Контактный потенциал (дельта-функция):*

$$V_{\text{strong}}(r) = -\frac{4\pi a_0}{\mu}\delta^3(r),$$

где $a_0 \sim 0.2\,\text{fm}$ — длина рассеяния $\pi\pi$ в состоянии с изоспином $I = 0$.

б) *Потенциал конечного радиуса (ступенька):*

$$V_{\text{strong}}(r) = \begin{cases} -V_0, & r \le R_{\text{strong}}, \\ 0, & r > R_{\text{strong}}, \end{cases}$$

где $V_0 \sim 100\,\text{MeV}, \quad R_{\text{strong}} \sim 1\,\text{fm}$.

в) *Юкавский потенциал:*

$$V_{\text{strong}}(r) = -g^2\frac{e^{-\mu_s r}}{r},$$

где g^2 — константа сильного взаимодействия, $\mu_s \sim 1\,\text{fm}^{-1}$.

3. Сравните полученные значения ΔE с экспериментальными данными.

4. Постройте графики зависимости ΔE от параметров a_0, V_0, g^2 для трёх предложенных моделей потенциала в сравнении с экспериментом.

5. Проанализируйте вклад сильного взаимодействия в общую энергию связи.

20.4. Эксперимент Штерна-Герлаха

Цель: Исследовать траектории спин-1/2 частицы в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B} = \nabla\Phi(x, y, z)$, используя уравнение Паули:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{(\widehat{\boldsymbol{P}} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right)\psi, \tag{20.1}$$

и теорему Эренфеста, и проанализировать влияние начального спина, неоднородности магнитного поля и начальных параметров частицы на её движение.

1. **Уравнения движения:** Используйте теорему Эренфеста для вычисления средних значений координат и импульса:

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m}, \quad \frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = -q\langle \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}) \rangle,$$

где $\boldsymbol{\mu} = -\frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma}$ — магнитный момент частицы.

2. **Начальные условия:**

   а) Начальные координаты: $\langle \mathbf{r}(0) \rangle = (0, 0, 0)$.

   б) Начальный импульс: $\langle \mathbf{p}(0) \rangle = (p, 0, 0)$.

   в) Начальный спин: вдоль $+z$-оси ($\sigma_z = +1$) или $-z$-оси ($\sigma_z = -1$).

3. **Магнитное поле:** Рассмотрите неоднородное магнитное поле, заданное, например, через скалярный потенциал $\Phi(x, y, z)$:

$$\mathbf{B} = \nabla\Phi(x, y, z), \quad \Phi(x, y, z) = B_0 z + \frac{B_1}{2}(x^2 - y^2).$$

Это поле приближённо моделирует реальную установку для эксперимента Штерна-Герлаха.

4. **Траектории:** Численно решите уравнения движения для средних координат $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$, $\langle z(t) \rangle$. Постройте траектории для частиц со спинами вдоль $+z$ и $-z$.

5. **Графики:**

   а) Траектории $\langle x(t) \rangle$ и $\langle z(t) \rangle$ для разных значений начального импульса p, интенсивности поля B_0 и градиента B_1.

   б) Сравнение отклонений для частиц с разными начальными спинами ($+z$ и $-z$).

6. **Анализ:** Объясните, как неоднородность поля (B_1) и параметры частицы (p, m, начальный спин) влияют на траектории. Укажите, почему сила Лоренца в этом эксперименте не влияет на разделение траекторий.

20.5. Уравнение Дирака в 1+1 измерениях

Рассмотрите уравнение Дирака в одном пространственном и одном временном измерениях.

1. Найдите явный вид γ^μ матриц, удовлетворяющих соотношению
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

2. Найдите γ^5.

3. Предполагая массу фермиона равной нулю, покажите, что получаются две независимых уравнения движения для частиц, движующихся влево и вправо.

4. Покажите, что сохраняются токи:
$$\partial_\mu\left(\overline{\psi}\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi\right) = 0, \quad \partial_\mu\left(\overline{\psi}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi\right) = 0.$$

5. Включите электрическое поле A^1, постоянное в пространстве и медленно меняющееся со временем. Найдите гамильтониан и его собственные значения, считая, что ось x имеет конечную длину L и накладывая периодические граничные условия. Нарисуйте спектр энергий для левых и правых фермионов.

6. Что произойдет со спектром энергии, если медленно изменить A^1 на
$$\Delta A^1 = \frac{2\pi}{eL}?$$

20.6. Симметрии σ-модели

Лагранжиан σ-модели:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + (\partial_\mu\boldsymbol{\pi})\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\pi})\right] + i\overline{\Psi}\hat{\partial}\Psi + g\overline{\Psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\Psi$$
$$-\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2,$$

где: - $\sigma(x)$ — скалярное поле, - $\boldsymbol{\pi}(x)$ — трёхкомпонентное скалярное поле, - $\Psi(x)$ — дублет фермионных полей, - $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули.

Симметрия: Докажите, что лагранжиан $\mathcal{L}$ обладает следующей симметрией:

$$\sigma(x) \to \sigma(x),$$

$$\boldsymbol{\pi}(x) \to \boldsymbol{\pi}(x) - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}(x),$$

$$\Psi(x) \to \Psi(x) + i\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}\Psi(x),$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — 3-вектор бесконечно-малых параметров преобразования. Найдите соответствующий нётеровский ток.

20.7. Релятивистский тремор

1. Пусть при $t = 0$ состояние свободного электрона дается

$$\psi(0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi d^2)^{3/4}} e^{-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20.2}$$

   Найдите $\psi(t, \boldsymbol{x})$ при $t > 0$.

2. Получите аналитическое выражение для среднего тока в виде интеграла по 3-импульсу:

$$\boldsymbol{J} = \int d^3x \psi^\dagger(x)\, \boldsymbol{\alpha}\, \psi(x)$$

3. Вычислите этот интеграл численно и создайте анимацию для $\boldsymbol{J}(t)$.

20.8. Симметрии

1. Используя теорему теорему Нётер, получите сохраняющийся ток для

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

при глобальных калибровочных преобразованиях

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \ \overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}.$$

2. Используя теорему теорему Нётер, получите сохраняющийся ток для $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi$ при киральном преобразовании

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi.$$

Получите закон преобразования поля $\bar{\psi}$.

3. Докажите, что действие для безмассового поля Дирака инвариантно при преобразованиях дилатации:

$$x \to e^{-\rho x} \cdot x, \quad \psi(x) \to \psi'(x') = e^{3\rho/2}\psi(x).$$

Найдите соответствующий нётеровский ток заряд.

20.9. Эффект Казимира

1. Рассмотрите эффект Казимира в 3D. Вычислите давление притяжения пластин, используя формулу Эйлера-Маклорена.

2. Объясните природу притяжения пластин. Можно ли извлекать энергию из вакуума этим способом?

3. Оцените величину давления. Сравните с гравитационным притяжением пластин в зависимости от расстояния между ними.

4. Сделайте обзор экспериментальных методов и результатов измерения эффекта Казимира.

20.10. Дифракция на щели

1. Рассмотрите рассеяние скалярного поля $\phi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$, в рамках уравнения Гельмгольца.

2. Найдите функцию Грина уравнения Гельмгольца.

3. Рассмотрите узкую щель на экране в форме: a) квадрата, b) равностороннего треугольника.

4. Вычислите численно поле за экраном в дальней зоне.

20.11. γ матрицы Дирака

1. Покажите, что коммутатор $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}]$ может быть записан через матрицы $\sigma_{\mu\nu}$. Найдите коэффиценты этого разложения.

2. Вычислите след

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5\right).$$

3. Вычислите:

$$\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu}\gamma^\alpha\sigma^{\mu\nu}.$$

20.12. Тахион

Тахион – это гипотетическая частица, движущаяся со скоростью, превышающей скорость света. Часто это интерпретируется как возможность передавать сверхсветовые сигналы. Исследуйте вопрос – так ли это?

1. Рассмотрите цепочку из маятников в однородном гравитационном поле, подвешенных к общему основанию и соединенных пружинками. Расстояние между маятниками равно a.

2. Покажите, что функция Лагранжа для этой системы имеет вид:

$$L = \sum_i \left(a\dot{\phi}_i^2 - b(\phi_i - \phi_{i-1})^2 - c(1 - \cos\phi_i)\right),$$

где ϕ_i – угол отклонения i-го маятника от положения равновесия. Определите a, b, c.

3. Сделайте переход к бесконечному числу маятников в пределе $a \to 0$. Покажите, что лагранжиан эквивалентен
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - m^2(1-\cos\phi).$$

4. Получите уравнение движения поля ϕ:
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2\sin\phi = 0.$$

5. В случае малого отклонения от положения равновесия $\phi = 0$, получается обычное уравнение Клейна-Фока-Гордона:
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + m^2\phi = 0.$$

6. В случае малого отклонения от положения равновесия $\phi = \pi$, получается уравнение Клейна-Фока-Гордона с отрицательным квадратом массы:
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - m^2\phi = 0.$$
Формально, плоская волна $\phi = e^{-i\omega t+ikx}$ даёт:
$$\omega^2 = k^2 - m^2, \quad \text{и групповая скорость ,} \quad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{k}{\omega} > 1.$$

7. Покажите, что решение уравнения:
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)\phi = \delta(t)\delta(x)$$
распространяется со скоростью, меньшей 1.

20.13. Релятивистский тремор с формальной стороны

1. Перейдём к представлению Гейзенберга для оператора координаты:
$$\boldsymbol{r}_H(t) = e^{i\widehat{H}t}\boldsymbol{r}e^{-i\widehat{H}t},$$

где $\widehat{H}$ – свободный гамильтониан Дирака:

$$\widehat{H} = -i\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta.$$

2. Оператор $\boldsymbol{r}_H(t)$ подчиняется уравнению:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_H}{dt} = -i[\boldsymbol{r}_H, \widehat{H}] = \boldsymbol{\alpha}_H(t),$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}_H(t) = e^{i\widehat{H}t}\boldsymbol{\alpha}e^{-i\widehat{H}t}.$$

Покажите верность последнего равенства.

3. Найдите явный вид $\boldsymbol{r}_H(t)$. Дайте физическую интерпретацию найденному решению.